# משפט

תהיינה סדרות המקיימות לכל ונניח ש אזי מתכנסת לאותו הגבול

## דוגמה

חשב את

נתבונן בסדרות:

נחזור לשאלה:

*לכן*

אי שוויון ברנולי(Bernoulli)

נניח ש אזי

## הוכחה

עבור

נניח שזה נכון עבור ונוכיח שזה נכון עבור

אנחנו יודעים: . צ"ל

# דוגמה

אם אזי באשר ולכן ע"פ אי שוויון ברנולי

עבור ברור ש

עבור אזי ומכאן

# דומגה

יהי . לחשב

ברור ש

נניח ש אזי . נסמן

לכן

אם אזי ולכן כלומר ולכן

# לחשב

ברור ש. נשים , .

# למה(משפט עזר)

עבור , , מתקיים

## הוכחה

עבור : : מתקיים

נניח שזה נכון עבור ונוכיח שזה נכון עבור . לפי ההנחה:   
צ"ל :

# נחזור לשאלה

# כמה דוגמאות

לעומת זאת

סדרות מונוטוניות

# הגדרות

תהי סדרה.  
נגיד ש הינה סדרה עולה אם לכל n.  
נגיד ש הינה סדרה לא יורדת אם לכל n.   
נגיד ש הינה סדרה יורדת אם לכל n.  
נגיד ש הינה סדרה לא עולה אם לכל n.

סדרות כאלה נקראות סדרות מונוטוניות – סדרה היא סדרה מונוטונית רק אם היא לא יורדת או לא עולה.

# משפט

סדרה לא יורדת חסומה מלעיל מתכנסת

## הוכחה

נתבונן בקבוצה . אזי וגם חסומה מלעיל, לכן קיים .

טענה:

אמנם יהי קיים N כך ש אחרת היה חסם מלעיל קטן מM. מכאן אם אזי =>

# תרגיל

באופן דומה אפשר להוכיח: סדרה לא עולה החסומה מלרע מתכנסת.

רמז 1) להוכיח שהגבול מתלכד עם

אפשרות שנייה – להתבונן בסדרה

# הערות

1. אפשר לתמצת את התוצאות הקודמות בניסוח: סדרה מונוטונית שהיא חסומה מתכנסת.
2. משפטים אלה אינם נכונים עבור סדרות ב.  
   דוגמה: באשר . סדרה זו לא יורדת וחסומה מלעיל(ע"י ) אבל לא קיים שהיא מתכנסת אליו.

# דוגמה

נתבונן בסדרה

דהיינו הסדרה כך ש ו

טענה: סדרה זו מתכנסת.

אמנם הסדרה עולה, שכן אם אזי . לגבי

הסדרה חסומה מלעיל: טענה: לכל n באשר .

נניח ש. טוענים ש

אמנם לכן

לכן הסדרה חסומה מלעיל ולכן הסדרה מתכנסת.

ע"פ ההוכחה של המשפט שלמדנו הגבול מתלכד עם ה של הסדרה, ז"א

## סיום אחר להוכחה

ידוע שקיים . מתקיים ז"א

אם אזי כלומר

*מכיוון שהקטן מביניהם קטן מאפס ז"א*